Lois de base de l'électrocinétique

« Patience et longueur de temps
Font plus que force ni que rage. »
Jean de La Fontaine, Fables, le Lion et le Rat.

Résumé

L'électrocinétique traite de la circulation des charges électriques dans les milieux conducteurs appelés réseaux ou circuits. Deux grandeurs essentielles dépendantes du temps sont utilisés, le courant (débit de charges) et la tension (différence de potentiels entre deux points d'un circuit). Ces grandeurs sont repérées par rapport à un sens conventionnel choisi arbitrairement.

Ces charges apparaissent dans des éléments électriques appelés dipôles (résistances, sources de tension ou de courant, indépendantes ou liées, condensateurs et inductances) qui sont décrits tour à tour. Les éléments de base, interconnectés au sein des réseaux, sont régit par les lois de fonctionnement de Kirchhoff (loi des nœuds, loi des mailles).

Les dipôles électriques et les réseaux peuvent être décrits par leur comportement énergétique. On définit alors la puissance et l'énergie, ainsi que leur manifestation au sein des éléments de base.

Enfin, sans les étudier, les différents modes d'étude des réseaux électriques sont introduits : le **régime transitoire** entre deux **régimes permanents**.

Sommaire

I. Définitions

I.1. Les grandeurs électriques

De manière courante, à l'échelle des circuits (et non à l'échelle des matériaux), deux grandeurs électriques essentielles interviennent dans les circuits électriques : le **courant** et la **tension**.

I.1.1. Le courant électrique

Le **courant électrique** (noté *i*) dans un conducteur est le débit de charges (*dq/dt*). C'est une **grandeur algébrique** dont le signe marque le sens de déplacement des charges. Il s'exprime en **ampères**[1] (A).

Le courant est noté par une flèche placée sur le conducteur marquant son sens (***Figure 1***).

I.1.2. La tension

La **tension électrique** (notée *u*) entre deux points d'un circuit est la différence entre les potentiels (notés *v*) en ces deux points. C'est pour cela que la tension électrique est aussi dénommée **différence de potentiel** (ddp) et s'exprime en **volts**[2] (V). La tension est indiquée par une flèche placée entre les deux points du circuit (***Figure 2***). La différence est définie par rapport à un potentiel nul de référence pour le circuit, **la masse** (***Figure 3***). La tension est donc une **grandeur algébrique**.

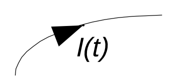


Figure 1

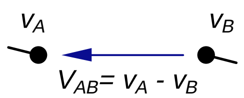


Figure 2

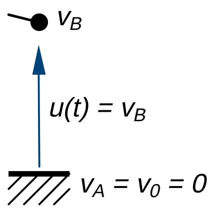


Figure 3

I.2. Conventions d'écriture

Dans un circuit électrique, on ne connaît pas, a priori, le signe du courant et de la tension. Il faut donc établir une convention de notation de ces grandeurs : la **convention générateur** (***Figure 4***) et la **convention récepteur** (***Figure 5***).

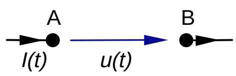


Figure 4 : convention générateur.

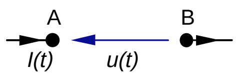


Figure 5 : convention récepteur.

II. Réseaux de Kirchhoff[3]

Les **réseaux électriques** sont constitués d'**éléments** que nous nous attacherons à définir. Il sont **interconnectés** et régis par des **lois** qui régissent cet assemblage.

La finalité de cette démarche est de **déterminer** les **grandeurs inconnues** à partir de celles **connues** par l'intermédiaires des lois de comportement issues de l'étude.

II.1. Les éléments de base

Les éléments disposent d'un nombre fini de **bornes** destinées à établir les connexions (2 bornes = dipôle, 4 bornes = quadripôle, *n* bornes = multipôle,…). Chacune des bornes est placée à un certain potentiel tandis qu'elle véhicule un courant (entrant ou sortant). Ces deux grandeurs électriques sont des fonctions réelles du temps (voir §I.1 et §I.2 pour les notations et définitions).

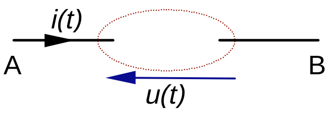
---

1 Ampère (André-Marie), physicien Français (1775-1836).

2 de Volta (Alessandro, comte), physicien italien (1745-1827).

3 Kirchhoff (Gustav), physicien allemand (1824-1887).

Pour un multipôle, la **somme des courants entrants** est égale à la somme des courants sortants. Les tensions et les courants ont un sens conventionnellement choisi et invariant par la suite pour conduire à la notation de la ***Figure 6***.



Dans le cas de ce dipôle, le courant i est positif s'il circule réellement de A vers B, tandis que la flèche représentant la tension est notée dans le sens contraire du courant pour représenter $v_A > v_B$.

Figure 6

II.1.1. La résistance (Figure 7)

Loi de fonctionnement (loi d'Ohm[4]) : $u(t) = Ri(t)$.

où R est la résistance électrique en Ohms (Ω).

u et i sont exprimés respectivement en Volts (V) et en Ampères (A).

On écrit aussi $i(t) = Gu(t)$.

où G ($= 1/R$) est la conductance en Siemens (S).

Symbole, schéma et notations (conv. récepteur)

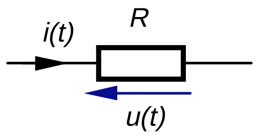


Figure 7

Si R (resp. G) est constante, on dit que la résistance est linéaire. Dans le cas contraire, la résistance est non linéaire. La représentation graphique $i = f(u)$ est la caractéristique tension-courant de la résistance.

La loi d'Ohm est illustrée pratiquement en montrant l'homotétie des relevés temporels sur la Figure 8.

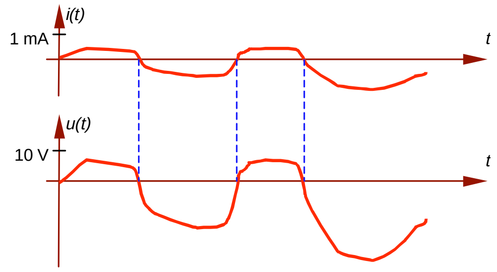
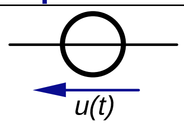


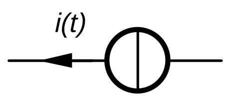
Figure 8 : illustration pratique de la loi d'Ohm.

II.1.2.Sources indépendantes (*Figure 9* et *Figure 10*)



$u(t)$ est indépendante de $i(t)$: u est imposée.

Figure 9* : *générateur de tension ; symbole, schéma et notations.



$i(t)$ est indépendant de $u(t)$: i est imposé.

Figure 10* : *générateur de courant ; symbole, schéma et notations.

Remarques (pour se souvenir des symboles) : générateur de tension, $r_{interne}$ faible, le trait traverse.
générateur de courant, $r_{interne}$ élevée, trait interrompu.

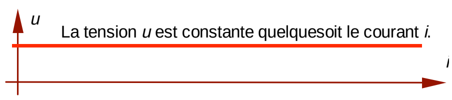


Figure 11 : générateur de tension constante.

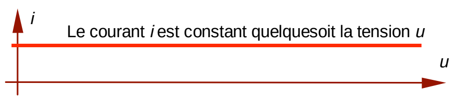
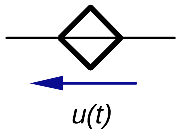


Figure 12 : générateur de courant constant.

On dit que le **générateur de tension** est **éteint** lorsqu'il est réduit à une **tension identiquement nulle** (équivalent à un conducteur). Pour le **générateur de courant**, il est **éteint** si le **courant** est **identiquement nul** (circuit ouvert).

[4] Ohm (Georg), physicien allemand (1789-1854).

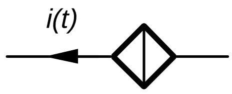
II.1.3. Sources dépendantes (*Figure 13* et *Figure 14*)



u(t) est dépendante d'une autre grandeur, *u'(t)* ou *i'(t)*, d'un autre élément du réseau :

$u(t)=\alpha\, i'(t)$ ou $u(t)=\beta\, u'(t)$

Figure 13 : générateur de tension dépendant ; symbole, schéma et notations



i(t) est dépendant d'une autre grandeur, *u'(t)* ou *i'(t)*, d'un autre élément du réseau :

$i(t)=\delta\, i'(t)$ ou $i(t)=\varepsilon\, u'(t)$

Figure 14 : générateur de courant dépendant ; symbole, schéma et notations

Dans la pratique, on note la relation de dépendance à coté du générateur.

II.1.4. Condensateur (Figure 15)

Loi fondamentale : $i(t) = C\dfrac{du(t)}{dt}$

où C est la capacité en Farads[5] (F) du condensateur, indépendante du temps.

<u>dém</u> : $q(t)= i(t)dt$ et $q(t) = Cu(t)$ d'où le résultat en éliminant q.

Symbole, schéma et notations

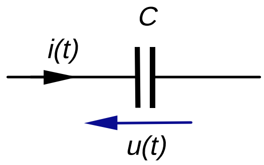


Figure 15

Conclusion et conséquence pratique :

A partir de la loi fondamentale, $u(t) = u(0) + \dfrac{1}{C}\int_0^t i(x)dx$, la tension *u(t)* est une fonction continue du temps.

En conséquence, on n'observe jamais de discontinuité de tension aux bornes d'un condensateur.

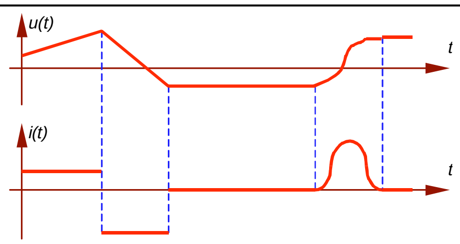


Figure 16 : illustration de la continuité de la tension aux bornes d'un condensateur.

II.1.5. Inductance ou self (Figure 17)

Loi fondamentale : $u(t) = L\dfrac{di(t)}{dt}$

où L est l'inductance du dipôle self en Henrys[6] (H), indépendante du temps.

Symbole, schéma et notations

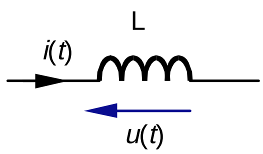


Figure 17

---

5 de Faraday (Mickael), physicien anglais (1791-1867).

6 Henry (Joseph), ingénieur-physicien américain (1797-1878).

Conclusion et conséquence pratique :

A partir de la loi fondamentale, $i(t) = i(0) + \frac{1}{L}\int_0^t u(x)dx$, le courant *i(t)* est une fonction continue du temps.

En conséquence, on n'observe jamais de discontinuité du courant traversant une inductance.

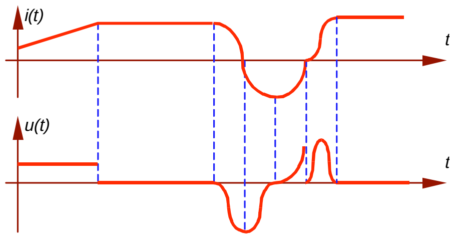


Figure 18 : illustration de la continuité du courant traversant une inductance.

II.2. Règles de connexion

Les différents éléments (§II.1) sont assemblés au sein de **réseaux**. Ces derniers sont composés de **branches** orientées reliant deux points appelés **nœuds**. Si les branches sont adjacentes (à la queue leu-leu) on a alors affaire à un **chemin**. Si deux chemins disjoints de mêmes extrémités sont reliés, on obtient une **maille** (ou cycle). Toutes ces définitions sont illustrées dans l'exemple de la ***Figure 19***.

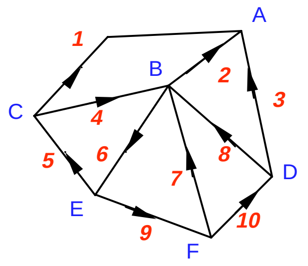


Figure 19 : exemple de réseau.

Ce réseau est un graphe. On y distingue :

- 6 noeuds, de A à F ;
- 10 branches, de 1 à 10 ;

- (4, 2, 3) est un chemin délimité par C et D.
- (8, 6, 5, 1, 3) est une maille.

Dans la pratique les branches sont composées d'un assemblage d'éléments du §II.1.

II.3. Loi des nœuds et loi des mailles

Loi des nœuds

La somme algébrique des courants circulant dans les branches adjacentes à un noeud est nulle. On peut dire aussi que la somme algébrique des k courants entrants dans un noeuds est égale à la somme des l courants sortants (toutes les charges apportées sont extraites).

$$\boxed{\sum_{\xrightarrow{k}\bullet} i_k = \sum_{\bullet\xrightarrow{l}} i_l}$$

Loi des mailles

La somme algébrique des tensions rencontrées en parcourant une maille (sens prédéfini) est nulle.

$$\sum (\pm) v_k = 0 \quad \begin{cases} v_k \text{ est comptée positivement si elle est dans le sens de parcours de la maille.} \\ v_k \text{ est comptée négativement si elle est dans le sens contraire du parcours de la maille.} \end{cases}$$

II.4. Méthodologie d'étude et exemple

II.4.1. Méthodologie

De manière appliquée, pour effectuer la mise en équation puis la résolution d'un circuit électrique, nous utiliserons la démarche suivante :

- dans un premier temps, numéroter les nœuds et les branches ;
- dans chaque branche du circuit, noter les courants (flèche pour le sens conventionnel et nom) ;
- pour chaque élément, noter la tension à ses bornes (flèche et nom) ;
- mettre en équation en utilisant deux groupes de relations :

- ♦ un pour les aspects topologiques (organisation du réseau) : (n-1) lois des noeuds pour n noeuds recensés et (m-1) lois de mailles pour m mailles indépendantes recensées,
- ♦ un second pour les relations attachées à chaque élément utilisé.
- poser les hypothèses simplificatrices (courants ou tensions identiques, contraintes imposées par les éléments) ;
- simplifier les relations en tenant compte des hypothèses — à ce stade on dispose d'un système d'équations ;
- résoudre le système pour en extraire les grandeurs inconnues.

Pour mettre en oeuvre cette démarche, intéressons-nous à l'exemple suivant.

II.4.2. Exemple : circuit simple à sept éléments (*Figure 20*)

Toutes grandeurs sont permanentes (pas de modification au cours du temps). On les note donc en lettre majuscules.

On cherche à évaluer l'expression du courant I dans la dernière résistance R.

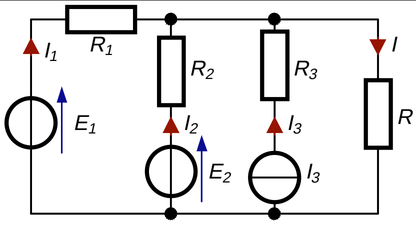


Figure 20

Courants : $I_1(t)$, $I_2(t)$, $I_3(t)$ et $I(t)$.

Tensions : E_1, E_2, U, U_1, U_2, U_3 (éléments).

Quatre branches : celles de E_1, E_2 , I_3 et U.

Trois mailles indépendantes : (E_1, R_1, R), (E_2, R_2, R) et (I_3, R_3, R).

Deux nœuds donc une seule loi des nœuds.

- 1 loi des nœuds : $I_1 + I_2 + I_3 = I$;
- 3 lois des mailles : $E_1 - R_1 I_1 = U$; $E_2 - R_2 I_2 = U$; E_3 (non imposée) - $R_3 I_3 = U$.

On obtient :

- $I = \dfrac{E_1 R_2 + E_2 R_1 + R_1 R_2 I_3}{R_1 R_2 + R R_1 + R R_2}$.

III. Description énergétique des circuits électriques

III.1. Définitions

Puissance

La puissance électrique instantanée (exprimée en watts[7], W)pénétrant dans un élément s'exprime par :

$$\boxed{p(t) = u(t)i(t)}$$

Energie

Si la puissance est intégrable sur]- ∞,t] l'énergie (exprimée en Joules[8], J) absorbée s'exprime par :

$$\boxed{w(t) = \int_{-\infty}^{t} p(x)dx = w(0) + \int_{0}^{t} p(x)dx}$$

On remarquera qu'il s'agit de la variation de l'énergie depuis un temps très long (infiniment reculé).

Si l'on respecte les conventions de signe précédemment établies, l'élément est **passif si *w(t)* est positive ou nulle**, **sinon** l'élément est **actif**.

---

7 de Watt (James), ingénieur écossais (1736-1819).

8 Joule (James), physicien anglais (1818-1889).

III.2. Expression de la puissance et de l'énergie pour les éléments définis

	Puissance	Energie
Résistance	$p_R(t) = u(t).i(t) = Ri^2(t) \geq 0$	$w_R(t) = R\int_{-\infty}^{t} i^2(x)dx \geq 0$
Condensateur	$p_C(t) = C\dfrac{du(t)}{dt}u(t) = \dfrac{1}{2}C\dfrac{du^2(t)}{dt}$	$w_C(t) = \dfrac{1}{2}Cu^2(t) \geq 0$
Inductance	$p_L(t) = L\dfrac{di(t)}{dt}i(t) = \dfrac{1}{2}L\dfrac{di^2(t)}{dt}$	$w_L(t) = \dfrac{1}{2}Li^2(t) \geq 0$

On remarque que **l'énergie est toujours positive**, signifiant que ces **éléments** sont **passifs**. Cependant, la **résistance** ne peut qu'absorber de la puissance (toujours positive) et la dissiper de manière irréversible : c'est un **élément dissipatif**. La puissance pénétrant dans le condensateur et l'inductance peut être positive ou négative : ces deux éléments peuvent emmagasiner et restituer de la puissance. Ces **éléments** sont **non dissipatifs** ou **réactifs** (ils peuvent restituer l'énergie emmagasinée).

III.3. Lois de Kirchhoff au sens énergétique

Loi des nœuds

En exprimant la loi des nœuds sous forme de puissance, alors la puissance pénétrant par un nœud est identique à celle en sortant.

Loi des mailles

La somme des puissances observées en parcourant une maille est nulle.

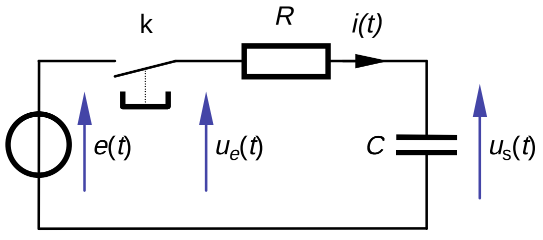
Il en résulte que la somme des puissances absorbées par toutes les branches d'un réseau est identiquement nulle. D'autre part, l'énergie fournie par les sources du réseau n'est dissipée que par les éléments passifs.

IV. Du réseau… à son étude suivant la nature des grandeurs

Nous venons de décrire les réseaux de Kirchhoff et proposer en ensemble de méthodes offrant des outils de mise en équation des circuits pour exprimer les inconnues.

Cet aspect essentiel nous garantit les fondements sur lesquels nous allons analyser les circuits en se référant, d'une part, à la nature des signaux issus des générateurs, mais aussi en tenant compte de évolution depuis leur naissance jusqu'à un temps où tout est établi.

Nous allons mettre en évidence ces aspects sur un exemple élémentaire de circuit (***Figure 21***).



Le circuit *RC* série peut être mis sous tension à l'instant t=0 par le contact k.

Suivant la nature du signal délivré par le générateur de tension, comment va évoluer la tension $u_S(t)$ aux bornes du condensateur ?

Cette question à l'apparente simplicité va trouver ses réponses à travers différentes études.

Figure 21 : circuit RC série.

Si le générateur délivre une tension continue (permanente), dès la fermeture de k la tension $u_S(t)$ initialement nulle à l'instant $t = 0$ va croître pour se stabiliser à la tension du générateur. Pendant une période après t = 0, on observe un régime transitoire. Vient ensuite un régime établi appelé aussi régime permanent (***Figure 22***).

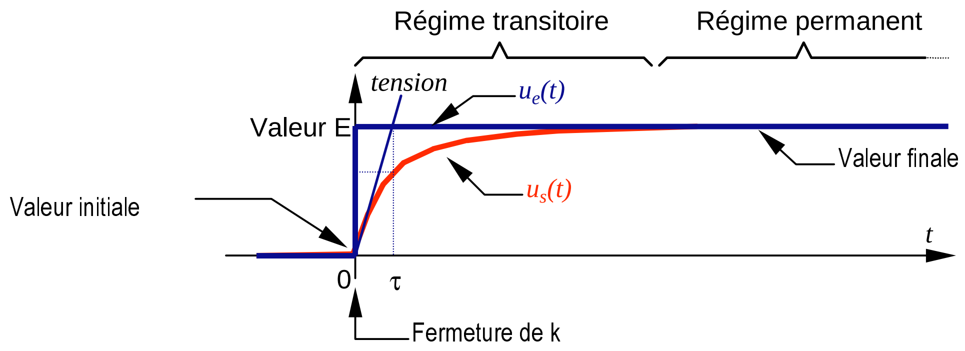


Figure 22 : réponse temporelle du circuit RC.

Si le générateur délivre une tension sinusoïdale, il existe aussi un régime transitoire qui fini par laisser place au régime permanent. Bien entendu la forme des tensions n'est plus la même que dans le cas précédent.

Dès lors que l'on connaît la topologie du circuit, nous disposons des moyens pour le mettre en équation. Si la nature des signaux délivrés par les générateurs est connue, la mise en équations va nous conduire à un ensemble d'équations différentielles dont la résolution aboutit aux résultats évoqués un peu plus haut.

La résolution de l'équation sans second membre fournit une solution générale (SGESSM) décrivant le régime dit "libre", c'est à dire le **comportement transitoire**. La solution particulière de l'équation avec second membre (SPEASM) nous décrit les signaux lorsque le générateur aura réussi à s'imposer, à forcer son régime, c'est le **comportement permanent**.

La suite du cours suivra donc le fil conducteur suivant :

- connaître les caractéristiques des signaux et en particuliers des signaux usuels ;
- caractériser le comportement transitoire de certains réseaux ;
- s'intéresser aux éléments soumis aux signaux sinusoïdaux de fréquence fixe ;
- s'attacher au régime permanent pour des signaux sinusoïdaux de fréquence fixe ;
- généraliser l'étude des réseaux soumis à des signaux sinusoïdaux de fréquence variable.

V. Bibliographie

■ [1] **Boite R. et Neirynck J.**. Théorie des réseaux de Kirchhoff. Traité d'électricité, d'électronique et d'électrotechnique. Dunod. 1983.